Originalarbeit

Komponenten des Zehnerübergangs

Arithmetisches Faktenwissen und konzeptuelles Verständnis als Basis für den Zehnerübergang in der zweiten Schulstufe

Editor's Choice

Martin Schöfl[1,2], Kurt Winkler[1], Christoph Weber[1,2] und Liane Kaufmann[3]

[1]Pädagogische Hochschule Oberösterreich, Linz, Österreich
[2]Forschungsinstitut für Entwicklungsmedizin (RID), Johannes Kepler Universität Linz, Österreich
[3]Klinik für Neurologie und Klinische Neuropsychologie, Ernst von Bergmann Klinikum, Potsdam, Deutschland

Zusammenfassung: *Hintergrund:* Ein Meilenstein in der Rechenentwicklung der zweiten Klasse Grundschule ist das Verständnis und Beherrschen des Zehnerübergangs. Der aktuelle Beitrag untersucht den Einfluss des arithmetischen Faktenwissens und des konzeptuellen arithmetischen Wissens auf die Beherrschung des Zehnerübergangs. *Methode:* An 158 Klassen oberösterreichischer Grundschulen (N = 2416 Kindern) wurden ab Mitte der ersten Klasse zu vier Testzeitpunkten arithmetische Kurztests durchgeführt. Die zeitverzögerten Zusammenhänge der einzelnen Komponenten untereinander und die Performanz beim Zehnerübergang in der zweiten Schulstufe wurden auf Basis unterschiedlicher Varianten des Cross-Lagged Panel Models (CLP-Modell) untersucht. *Ergebnisse:* Die Resultate des klassischen CLP-Modells zeigen einen positiven Zusammenhang zwischen den dem Faktenabruf und konzeptuellem Wissen der ersten Klasse sowie dem Zehnerübergang in der zweiten Klasse. Für das konzeptuelle Wissen können keine signifikanten Effekte auf den Zehnerübergang gezeigt werden. Unter Hinzunahme von (latenten) konfundierenden Variablen in das CLP-Modell sind die Effekte des Faktenabrufs auf den Zehnerübergang und / oder das konzeptuelle Wissen nicht mehr signifikant. *Diskussion:* Die Ergebnisse geben Anstoß für wichtige, aber empirisch noch weitgehend unbeantwortete Fragen zum kausalen Zusammenhang zwischen spezifischen arithmetischen Komponenten (Faktenabruf und konzeptuelles arithmetisches Wissen) einerseits und dem Zehnerübergang andererseits.

Schlüsselwörter: arithmetisches Faktenwissen, konzeptuelles arithmetisches Wissen, Zehnerübergang, Cross Lagged Panel-Model

Components of the Boundaries to Tens: Arithmetic Factual Knowledge and Conceptual Understanding as the Basis for the Transition to Tens in the Second Grade

Abstract: *Background:* A milestone in second-grade elementary school numeracy development is the understanding and mastery of crossing the tens boundary. Though the building blocks for children's arithmetic competencies underlying the crossing of the tens boundary have been described previously, the empirical evidence supporting these theories is sparse to date. The present paper is targeted at investigating the roles of number fact retrieval and arithmetic conceptual knowledge for children's mastery of crossing the tens boundary. *Method:* Brief tests of number fact and conceptual arithmetic knowledge were administered to first- and second-grade children in 158 school classes of Upper Austria. Participating children were tested at four time points, starting in the middle of the first grade. For N = 2416 children, at least two time points could be included in the data analyses. By using different variants of Cross-Lagged Panel Models (CLPM) we examined the time-lagged correlations of the arithmetic components of interest (i.e., number fact and conceptual knowledge) in relation to children's performance on crossing the tens boundary. *Results:* The results of the classical CLP-Model show that performance in number fact recall in first grade is positively correlated with performance regarding crossing the tens boundary in second grade as well as with conceptual knowledge in first grade. However, the effects of arithmetic conceptual knowledge on children's mastery of crossing the tens boundary were not significant. Finally, when adding (latent) confounding variables into the CLP-Model, also the effects of number fact retrieval and / or arithmetic conceptual knowledge were no longer significant. *Discussion:* Our findings provide novel insights into the important but currently largely unanswered questions regarding the causal relationship between specific arithmetic components (number fact knowledge and conceptual arithmetic knowledge) on the one hand and children's mastery of crossing the tens boundary on the other hand.

Keywords: arithmetic factual knowledge, conceptual arithmetic knowledge, tens transition, cross-lagged panel model

https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000435

Einleitung

Die Erweiterung des Zahlenraums auf zwanzig und der damit verbundene Zehnerübergang wird von vielen Kindern als herausfordernd erlebt (Gasteiger, Gerve, Nüsse & Schlief, 2019) und sogar als größte Lehr- und Lernschwierigkeit in den ersten Schuljahren bezeichnet (Radatz, Schipper, Dröge & Ebling, 1996). Ein wichtiges Lernziel der ersten Schulstufe besteht darin, Lösungsstrategien zu entwickeln, die auch für größere Zahlenräume anwendbar sind und die ein möglichst rasches und fehlerfreies Lösen von Überschreitungsaufgaben ermöglichen (Gasteiger, 2019). Darüber hinaus kommt erstmals das Verständnis für das Stellenwertsystem zum Tragen, da die Rechenoperationen komplexer werden und als Lösungsvoraussetzung folgende Kompetenzen nach der Entwicklung von basisnumerischen Fertigkeiten benötigt werden.

Spezifische arithmetische Kompetenzen:

- *Arithmetisches Faktenwissen:* Automatisierung in der Bewältigung von Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 10 (Gerster & Schulz, 2000).
- *Konzeptuelles arithmetisches Wissen:* Einsicht in das Teil-Ganzes Konzept sowie das zugehörige relationale Verständnis, welche durch die flexible Zerlegung einer gegebenen Zahl auf möglichst viele verschiedene Arten den Übergang vom zählenden Rechnen zum Abruf von arithmetischem Faktenwissen unterstützen (Padberg & Benz, 2021).

Gleichzeitig bauen Rechenoperationen auf domänenunspezifische (universelle) Kompetenzen auf:

- *Kognitive Einflussfaktoren* wie Sprache, Gedächtnis und Intelligenz;
- *Nicht-kognitive Einflussfaktoren* wie Selbstwirksamkeit, Rechenangst, Motivation u. a.

In der vorliegenden Arbeit werden an einer großen Stichprobe österreichischer Grundschulkinder die Zusammenhänge zwischen numerischem Faktenwissen, flexibler Rechenanwendung im Zahlenraum 10 sowie Addieren und Subtrahieren mit Zehnerüberschreitung analysiert (vgl. Abb. 1): Die Frage nach der Gewichtung des Einflusses einzelner Komponenten (Faktenwissen und konzeptuelles arithmetisches Wissen) in den ersten beiden Schulstufen bleibt bislang offen und sollen direkten Ansatzpunkt für eine passgenaue Förderung bieten (z. B. kann es um die Frage gehen, ob bei Kindern, denen das Rechnenlernen schwer fällt, vorrangig das Faktenwissen forciert werden soll oder aber das konzeptuelle Wissen?).

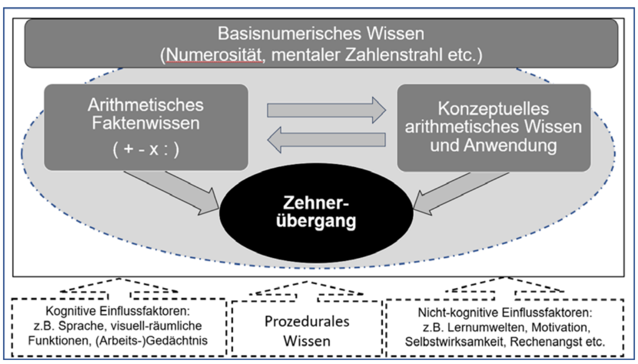

Abbildung 1. Schematische Darstellung relevanter numerischer und nicht-numerischer Einflussfaktoren auf das Rechnen mit Zehnerübergang sowie deren Wechselwirkungen.

Etablierung des arithmetischen Faktenwissens

Unter arithmetischem Faktenwissen wird generell die Fähigkeit zum raschen, genauen und flexiblen Lösen von Grundrechnungsarten (+, –, x, :) verstanden (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Russell, 2000). Diese einfachen Rechenaufgaben können von geübten Rechnern rasch und quasi automatisch aus dem Gedächtnis abgerufen werden (Kaufmann & von Aster, 2022). Anwendbares Faktenwissen wird erreicht, wenn das Zusammenspiel zwischen quasi automatisiert abrufbaren Grundaufgaben und der Anwendung numerischer Konzepte und Strategien gelingt (Gerster & Schultz, 2000; Kaufmann, Delazer, Pohl, Semenza & Dowker, 2005; Rathgeb-Schnierer, 2010; Schipper, 2009; Threlfall, 2009). Im ersten Schuljahr soll insbesondere beim Abruf des „Kleinen Einspluseins" (z. B. 4 + 3, 5 + 4, etc.) eine Automatisierung erzielt werden (Benz, 2010; Padberg, 2009). In einer Meta-Analyse von bildgebenden Studien bei Kindern mit und ohne Rechenschwäche (sowie Erwachsenen mit guter Rechenleistung) konnten Kaufmann, Wood, Rubinsten und Henik (2011) zeigen, dass die Entwicklung guter Rechenfertigkeiten neben dem Zusammenspiel der oben genannten numerisch-rechnerischen Komponenten (nämlich dem arithmetischen Faktenwissen und den Rechenfertigkeiten) auch ein etabliertes basisnumerisches Wissen erfordert (siehe auch Butterworth, 2017; Feldman & Berger, 2022; Gliksman, Berebbi & Henik, 2022; Poltz et al., 2022).

Erwerb des konzeptuellen arithmetischen Wissens

Neben der Beherrschung des basisnumerischen Wissens (Zählfähigkeiten, ordinales und kardinales Zahlverständnis, Mengenerfassung) sind das Teil-Ganzes Konzept und ein relationales Zahlverständnis wesentliche Meilensteine der arithmetischen Entwicklung in den ersten beiden Schuljahren (Fritz, Ehlert & Leutner, 2018).

In einem kognitiv-entwicklungsorientierten Modell der Autor_innen wird der Erwerb arithmetischer Kompetenzen im Sinne des konzeptuellen Wissens in den Mittelpunkt gerückt: der hierarchische Aufbau gliedert sich in seiner ursprünglichen Form in fünf teilweise überlappenden Entwicklungsstufen. Dabei folgt dem bloßen Aufsagen der Zahlwortreihe auf Stufe 1 eine Ausdifferenzierung des Wissens über Zahlen in Form eines ordinalen Zahlverständnisses auf Stufe 2. Nach dem Erwerb eines kardinalen Zahlverständnisses auf Stufe 3 wird es auf Stufe 4 möglich, Teilmengen aus einer Gesamtmenge herauszulösen und wieder zur ursprünglichen Zahl zusammenzusetzen. Auf Stufe 5 wird durch ein relationales Zahlverständnis eine Zerlegung in unterschiedliche Teilmengen möglich (Schneider, Küspert & Krajewski, 2021).

Teil-Ganzes Konzept (Stufe 4)

Im Lehrplan der ersten Schulstufe wird viel Zeit dafür verwendet, das Teil-Ganzes Verständnis als Strategie zum Lösen additiver Aufgaben zu fördern und durch Übung von Zerlegungsaufgaben nutzbar zu machen.

Nach Moser Opitz (2007) bildet das Teil-Ganzes Konzept die Grundlage für die Zahlzerlegung kleiner Zahlen, die simultan erfasst werden können. Daraus können Kinder durch die Prozesse des „fast Verdoppelns" (z. B. $6 + 7 = 2 \times 6 + 1$), des Verdoppelns, Zusammensetzens und Malnehmens neue Zahlen „erzeugen" (van de Valle, 2016). Somit können nach Belieben Zahlen zerlegt und zusammengesetzt werden, um schnelle und flexible Rechenwege entdecken und anwenden zu können.

Relationales Zahlverständnis (Stufe 5)

Unter relationalem Zahlverständnis versteht man die Einsicht, dass sich die Differenz zwischen zwei Zahlen durch eine dritte Zahl beschreiben lässt (Schneider et al., 2021). Zahlen können also auch verwendet werden, um die Relation zwischen zwei Zahlen zu bestimmen (z. B. $7 + \_\_ = 9$). Nur durch dieses konzeptuelle Verständnis ist es möglich, Zerlegung und Zusammensetzung der Summanden, Kraft der Fünf, Verdoppelungen, Tauschaufgaben, gegen- oder gleichsinniges Verändern und Analogiebildungen (Rechtsteiner, 2013) als strategische Werkzeuge zu nutzen (Benz, Peter-Koop & Grüßling, 2014; Fritz, Ehlert & Balzer, 2013). Diese Strategien dienen einerseits als Instrumente zur Automatisierung des kleinen Einspluseins und andererseits als Grundlage für flexibles Rechnen (Gaidoschik, 2012; Rechtsteiner, 2013).

Unter konzeptuellem arithmetischem Wissen versteht man also das Verständnis für Prinzipien wie beispielsweise die Vertauschbarkeit von Summanden, für das relationale Verhältnis von Zahlen zueinander oder die Zerlegbarkeit von Zahlen. Die Beherrschung dieses konzeptuellen arithmetischen Wissens ermöglicht und erleichtert die flexible Anwendung numerisch-rechnerischen Wissens (Baroody & Dowker, 2003).

Die Relevanz der Etablierung des konzeptuellen arithmetischen Wissens ist nicht auf die formale Beschulung beschränkt, sondern konnte auch für die numerische Frühförderung nachgewiesen werden (Dowker, 2001; Greeno, Riley & Gelman, 1984; Kaufmann et al., 2005).

Kognitive und nichtkognitive Einflussfaktoren

Zur Automatisierung von Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum zehn spielen neben domänen-spezifischen Faktoren auch domänen-unspezifische Einflussgrößen wie Wortschatz, Arbeitsgedächtnis, exekutive Funktionen und Übung eine wichtige Rolle (von Aster, Kaufmann, McCaskey & Kucian, 2021; Kaufmann & von Aster, 2022; Landerl, Vogel & Kaufmann, 2022). Der Erwerb der arithmetischen Fakten wird als entscheidend in der Rechenentwicklung angenommen, weil mit deren Hilfe und in Kombination mit der Anwendung konzeptuellen Wissens (z. B. Zerlegung und Zusammensetzung der Summanden, Kraft der Fünf, Tauschaufgaben) flexibles Rechnen möglich werde (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018).

Aufgaben über den Zehner erfordern die Anwendung so genannter *prozeduraler arithmetischer Prozesse* oder prozeduraler Lösungsstrategien und damit mehrere Teilschritte zur Lösung (Geary, Hamson & Hoard, 2000; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Vogel & Grabner, 2015; für eine Übersicht siehe Landerl et al., 2022).

Forschungsfragen und Hypothesen

Auf Basis der vorangegangenen Ausführungen lassen sich die nachfolgenden Hypothesen formulieren, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht werden sollen.

Hypothese 1: Leistungen im arithmetischen Faktenwissen sagen Leistungen im konzeptuellen arithmetischen Wissen vorher (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018).

Hypothese 2: Umgekehrt sagt gutes konzeptuelles arithmetisches Wissen den Erwerb des arithmetischen Faktenwissens vorher (Baroody, 1999, Baroody, 2006; Gliksman, Berebbi, Hershman & Henik, 2022).

Hypothese 3: Leistungen im arithmetischen Faktenwissen sagen nachfolgende Leistungen im zehnerüberschreitenden Addieren und Subtrahieren vorher (Gliksmanet al., 2022; Wartha, Schulz & Benz, 2023).

Hypothese 4: Leistungen im konzeptuellen arithmetischen Wissen sagen nachfolgende Leistungen im zehnerüberschreitenden Addieren und Subtrahieren vorher (Feldman & Berger, 2022; Poltz et al., 2022).

Methode

Stichprobe und Ablauf

Die vorliegende Studie greift auf Daten des Projekts Fömak aus den Schuljahren 2021/22 und 2022/23 zurück (Schöfl, Winkler & Weber, 2021). Im Rahmen dieses Projekts werden an den ersten und zweiten Schulstufen der Grundschulen des österreichischen Bundeslandes Oberösterreich kurze Arithmetiktest durchgeführt. Zusätzlich werden über die Plattform www.fömak.at Förderangebote im Bereich mathematischer Grundfertigkeiten zur Verfügung gestellt. Das Projektdesign sieht vor, dass Lehrkräfte jeweils zwei Tests in den ersten (März 2022 und Juni 2022) sowie zweiten Schulstufen (November 2022 und März 2023) durchführen können. Insgesamt wurde in den zwei Jahren an 158 Klassen zumindest einer der vier Tests durchgeführt. Für die Analysen dieses Beitrags werden Daten von 133 Schulstufen (2.416 Schüler_innen) verwendet, in denen zumindest zwei Tests durchgeführt wurden. Die teilnehmenden Schulen decken weitgehend das gesamte Bundesland ab, wobei sowohl Schulen aus dem ländlichen als auch urbanen Raum am Projekt teilnahmen. Je nach Standort können sich die Schulen deutlich in ihrer Zusammensetzung unterscheiden: so liegt etwa der Anteil an Schüler_innen mit Migrationshintergrund im städtischen Bereich mit 30%–40% deutlich über dem Anteilswert an ländlichen Schulen (unter 20%; Biedermann, Weber, Herzog-Punzenberger & Nagel, 2016). Die Stichprobe besteht zu 50% aus Mädchen.

Die Testungen wurden von Lehrkräften im Schulstufenverband als Paper-Pencil-Tests durchgeführt. Über Fortbildungsveranstaltungen und Videotutorials erhielten die Lehrkräfte Instruktionen für die Testdurchführung. Die Testauswertung erfolgte auch durch die Lehrkräfte. Konkret wurden Summenwerte (Anzahl richtiger Antworten und Anzahl Fehler) je Subtest auf der Projekthomepage in eine Datenmaske eingegeben. Getestet wurden nur Kinder, deren Eltern ein schriftliches Einverständnis zur Testung gaben.

Messinstrumente

Zur Erfassung der Rechenleistungen werden im Projekt www.fömak.at insgesamt fünf Subtests herangezogen. Alle Tests sind als Speedtests konzipiert, wobei eine Bearbeitungszeit von 2 Minuten pro Subtest vorgegeben war. Wie aus Abbildung 2 ersichtlich, wurde das *arithmetische Faktenwissen* zu allen vier Messzeitpunkten mit zwei Subtests erfasst. Die Schüler_innen sollten dazu von 78 Plus- bzw. 75 Minusrechnungen im Zahlenraum 10 so viele wie möglich lösen. Das *konzeptuelle arithmetische Wissen* wurde zu den ersten beiden Messzeitpunkten (d.h. in der zweiten Hälfte der ersten Schulstufe) durch 62 Aufgaben mit einem flexiblen Format erfasst. Dabei war jeweils das Ergebnis von Rechnungen im Zahlenraum 10 vorgegeben und die Kinder mussten Summanden an unterschiedlichen Positionen (z.B. 4 + ? = 7 oder 7 = 4 + ?) ergänzen.

In der zweiten Schulstufe wurden schließlich zwei Subtests (Addition und Subtraktion) zur Erfassung des *zehnerüberschreitenden Rechnens* im Zahlenraum 20 herangezogen. Für die Addition und Subtraktion wurden jeweils 54 Aufgaben verwendet.

Analyse

Zur Prüfung der Hypothesen wurde ein Strukturgleichungsansatz unter der Verwendung von Mplus 8 (Muthén & Muthén, 1998–2017) gewählt. Das konzeptuelle Untersuchungsmodell ist in Abbildung 3 dargestellt. Das Modell basiert auf dem klassischen Cross-Lagged Panel Model (CLP-Model; u.a. Selig & Little, 2012) wobei für die erste Schulstufe (T1 und T2) kreuzverzögerte (cross-lagged) Effekte (H1 und H2) zwischen dem arithmetischen Faktenwissen (AFW) und dem konzeptuellen arithmetischen Wissen (KAW) spezifiziert werden. Am Übergang zwischen erster (T2) und zweiter Schulstufe (T3) wird einerseits davon ausgegangen, dass arithmetisches Faktenwissen (H3) und konzeptuelles arithmetisches Wissen (H4) das zehnerüberschreitende Rechnen (ZÜR) beeinflussen. Anderseits wird auch hier ein Effekt des konzeptuellen arithmetischen Wissens auf das arithmetische Faktenwissen (H2) berücksichtigt. Zwischen T3 und T4 wird lediglich ein Effekt des arith-

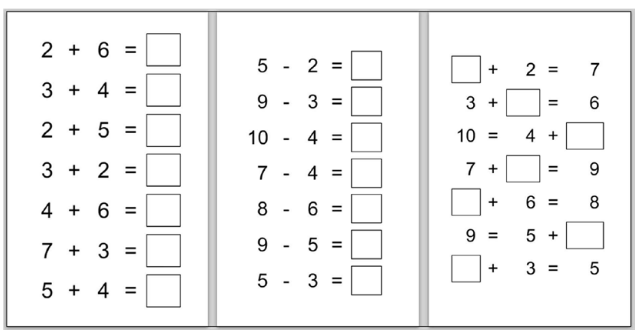

Abbildung 2. Ausschnitt Kurztestreihe im ersten Schuljahr. Beispielaufgaben zur Erfassung des arithmetischen Faktenwissens (Spalte 1 und 2) und des konzeptuellen Wissens (Spalte 3).

metischen Faktenwissens auf das zehnerüberschreitende Rechnen angenommen (H3). Des Weiteren wurden autoregressive Effekte (d.h. Effekt des arithmetischen Faktenwissens zu T1 auf das arithmetische Faktenwissen zu T2, …) sowie querschnittliche (Residual)Korrelation der Variablen spezifiziert. Da für das arithmetische Faktenwissen sowie das zehnerüberschreitende Rechnen jeweils zwei Subtests (Addition und Subtraktion) vorliegen, wurden diese beiden Variablen als latente Variable mit jeweils zwei Indikatoren modelliert, wobei hier eine starke longitudinale Invarianz (d.h. invariante Faktorladungen und invariante Intercepts) der Messmodelle angenommen wurden (Widaman, Ferrer & Conger, 2010). Die schrittweise Prüfung der Invarianzannahmen war mit keiner relevanten Verschlechterung der Modellanpassung verbunden. Änderungen im *Comparative Fit Index* (ΔCFI) > .01 und im *Root Mean Square Error of Approximation* (ΔRMSEA) > .015 sind nach Chen (2007) ein Hinweis darauf, dass die Invarianzannahme nicht aufrecht gehalten werden kann. Für das arithmetische Faktenwissen ergab die Annahme invarianter Faktorladungen (schwache Invarianz) ein ΔCFI = .002 und ΔRMSEA = .003. Für die Annahme starker Invarianz (invariante Intercepts) war ΔCFI = .005 und ΔRMSEA = .005. Für das zehnerüberschreitende Rechnen ergaben sich jeweils keine Änderungen (d.h. ΔCFI und ΔRMSEA jeweils 0).

Das klassische CLP-Modell geriet in den letzten Jahren vermehrt in die Kritik, weil es unzureichend für bestehende stabile Unterschiede zwischen Individuen kontrolliert und somit zu verzerrten Schätzungen der kreuzverzögerten Effekten führen kann (Hamaker, Kuiper & Grasman, 2015). Im vorliegenden Beitrag wären beispielsweise bestehende stabile Unterschiede im basisnumerischen Wissen oder unspezifische Kompetenzen (u.a. Intelligenz) in Betracht zu ziehen, die zu einer verzerrten Schätzung führen können. Zur Berücksichtigung von potentiell konfundierenden Variablen im CLP-Modell wurden unterschiedliche Ansätze entwickelt (für einen Überblick siehe Lüdtke & Robitzsch, 2022), die jedoch häufig für alle Variablen mindesten drei Messzeitpunkte benötigen, was im vorliegenden Beitrag nur für das arithmetische Faktenwissen gegeben ist. Zwei zusätzliche Modellspezifikationen können jedoch auf das vorliegende Design übertragen werden. (1) Die Berücksichtigung von Effekten über zwei Zeitintervalle (d.h. von T1 auf T3 und von T2 auf T4; CLPM L2) kann einerseits als Modellierung von zeitlich länger verzögerten Effekten und andererseits als eine umfassendere Kontrolle von bestehenden Unterschieden bei der Schätzung von kreuzverzögerten Effekten betrachtet werden (Lüdtke & Robitzsch, 2022). (2) Die Spezifikation einer latenten Hintergrundvariable, die mit den Ausgangswerten zu T1 korreliert und alle nachfolgenden Messungen beeinflusst, soll eine Kontrolle von bestehenden nicht gemessenen Variablen ermöglichen (Lüdtke & Robitzsch, 2022). Anzumerken ist, dass die Effekte (Ladungen) dieser latenten Variablen als zeitinvariant betrachtet werden müssen, da ansonsten das Modell nicht identifiziert werden kann. Diese Invarianz-Annahme mag nicht haltbar sein, kann jedoch im vorliegenden Beitrag (aufgrund zu weniger Messzeitpunkte für das konzeptuelle arithmetische Wissen und das zehnerüberschreitende Rechnen) nicht getestet werden.

Für die Analysen wurde das komplexe Stichprobendesign durch Verwendung des Mplus-Befehls TYPE = COMPLEX berücksichtigt. Dadurch werden die Standardfehler u.a. für die Abhängigkeit der Beobachtungen adjustiert.

Der Anteil fehlender Werte liegt zwischen 20.6 % (Messungen zu T1) und 41 % (Messungen zu T4). Die relativ hohen Anteile ergeben sich dadurch, dass Lehrkräfte die Tests nicht zu allen möglichen Messzeitpunkten durchgeführt haben (siehe dazu auch oben). Der Missing Completely at Random (MCAR) Test nach Little (1988) zeigt, dass die MCAR-Annahme abzulehnen ist ($\chi^2(206)$ = 374.34; p < .001). Im Detail wird sichtbar, dass jene Schüler_innen vermehrt fehlende Daten aufweisen, die zu früheren oder späteren Messzeitpunkten vergleichsweise weniger Testaufgaben lösen konnten. Somit ist von einem Missing at Random (MAR) Mechanismus auszugehen, der die Verwendung einer Full Information Maximum Likelihood Schätzung zur adäquaten Berücksichtigung der feh-

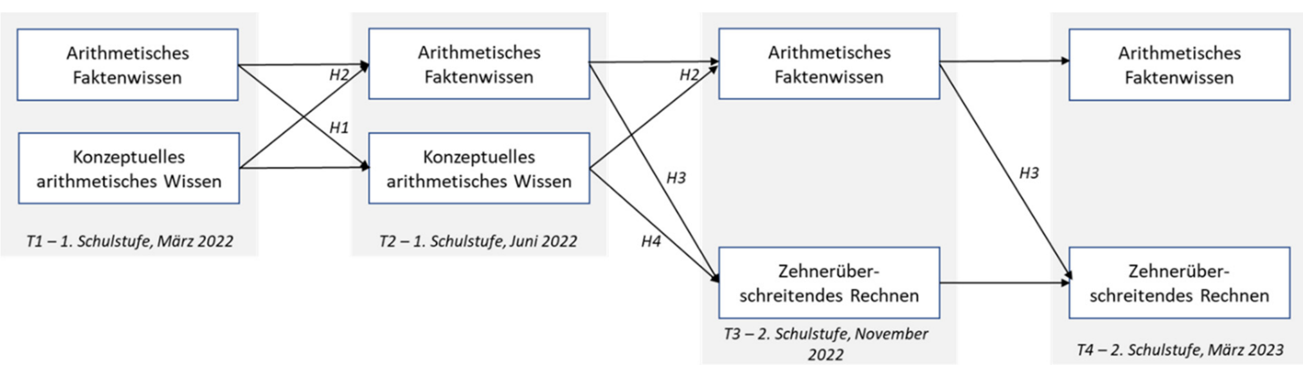

Abbildung 3. Flowchart über die Subtests der vier Untersuchungszeitpunkte und Hypothesenprüfung.

lenden Werte erlaubt. Konkret wurde die MLR-Schätzung mit robusten Standardfehlern verwendet.

Ergebnisse

Tabelle 1 zeigt die latenten Korrelationen, Mittelwerte (MW) und Standardabweichungen (SA) der Untersuchungsvariablen. Insgesamt fällt auf, dass alle Variablen hoch korrelieren ($r \geq .56$), wobei insbesondere auch die Autokorrelationen (Stabilitäten) der beiden mit zwei Indikatoren gemessenen Merkmale (AFW, ZÜR) besonders hoch ausfallen ($r \geq .84$). Die Autokorrelation für das konzeptuelle arithmetische Wissen fällt mit $r = .72$ etwas schwächer aus. In Bezug auf das zehnerüberschreitende Rechnen zeigt sich, dass hier vor allem die Korrelationen mit dem arithmetischen Faktenwissen sehr deutlich ausfallen: so etwa ergibt sich zu T4 (Mitte 2. Schulstufe) eine Korrelation von $r = .88$zwischen den beiden Variablen. Des Weiteren zeigen die Mittelwerte, dass im Zeitverlauf erwartungsgemäß alle Messwerte zunehmen (d.h. eine Leistungsverbesserung reflektieren). Schließlich zeigt sich auch, dass mit der Zunahme auf Mittelwertebene auch eine Zunahme der Streuung sichtbar wird.

Die Ergebnisse der drei Modellvarianten zur Prüfung der Hypothesen sind in Tabelle 2 dargestellt. Die Modellanpassung fällt gemäß gebräuchlichen Grenzwerten (Schermelleh-Engel, Moosbrugger & Müller, 2003) gut aus. Die Spalte CLPM L1 zeigt das Modell mit kreuzverzögerten Effekte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten. Insgesamt zeigen sich hohe Stabilitäten für das arithmetische Faktenwissen (autoregressive Effekte; standarisierter Koeffizienten, $\beta > .803$, $p < .001$). Für das zehnerüberschreitende Rechnen ($\beta = .603$, $p < .001$) und das konzeptuelle arithmetische Wissen ($\beta = .468$, $p < .001$) sind die Stabilitäten deutlich geringer. In Hinblick auf die Hypothesen zeigt sich folgendes Bild: In Einklang mit H1 zeigt sich ein Effekt des arithmetischen Faktenwissens zu T1 (Mitte erste Klassenstufe) auf das konzeptuelle arithmetische Wissen am Ende der ersten Klassenstufe ($\beta = .311$, $p < .001$). Des Weiteren erhält H3 Unterstützung durch die Ergebnisse des CLPM. Konkret zeigen sich kreuzverzögerte Effekte des arithmetischen Faktenwissens auf das zehnerüberschreitende Rechnen (AFW T2 → ZÜR T3: $\beta = .768$, $p < .001$; AFW T3 → ZÜR T4: $\beta = .284$, $p < .001$), wobei der sehr hohe Effekte zwischen T2 und T3 im Kontext dessen zu sehen ist, dass hier keine Kontrolle des zehnerüberschreitenden Rechnens zu T2 erfolgte. Im Gegensatz dazu ergeben sich für das konzeptuelle arithmetische Wissen keine kreuzverzögerten Effekte auf das arithmetische Faktenwissen (H2) und das zehnerüberschreitende Rechnen (H4).

In Hinblick auf die Modellvariante mit kreuzverzögerten Effekten über zwei Zeitintervalle hinweg (CLPM L2) bestätigen sich die Befunde von CPLM L1 zu H2 und H4. Das konzeptuelle arithmetische Wissen hat weder Effekte auf das arithmetische Faktenwissen (H2) noch auf das zehnerüberschreitende Rechnen (H4). Da im Zusammenhang mit H1 – Effekt des arithmetischen Faktenwissens zu T1 auf das konzeptionelle arithmetische Wissen zu T2 – keine zusätzlichen Effekte spezifiziert wurden, ist es wenig verwunderlich, dass sich dieser Effekt kaum ändert. Der Effekt des arithmetischen Faktenwissens auf das zehnerüberschreitende Rechnen (H3) wird ebenso wieder bestätig, wobei hier interessanterweise auffällt, dass die L2-Effekte, also jene von T1 auf T3 sowie von T2 auf T4, signifikant sind.

Versucht man bestehende Unterschiede in nicht gemessenen Variablen zwischen den Schüler_innen mittels der Spezifikation einer latenten Variable (LV) zu kontrollieren,

Tabelle 1. Latente Korrelationen, Mittelwerte und Standardabweichungen

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
AFW T1	(1)	1							
AFW T2	(2)	.85***	1						
AFW T3	(3)	.79***	.86***	1					
AFW T4	(4)	.74***	.83***	.87***	1				
KAW T1	(5)	.69***	.72***	.69***	.62***	1			
KAW T2	(6)	.82***	.82***	.72***	.69***	.72***	1		
ZÜR T3	(7)	.69***	.70***	.85***	.74***	.56***	.57***	1	
ZÜR T4	(8)	.67***	.72***	.78***	.88***	.57***	.60***	.84***	1
M		22.43	28.37	32.95	30.37	14.87	20.87	15.52	19.76
SD		8.44	10.97	11.91	13.96	9.38	11.58	7.94	9.31

Anmerkung: AFW = arithmetisches Faktenwissen, KAW = konzeptuelles arithmetisches Wissen, ZÜR = zehnerüberschreitendes Wissen. *** $p < .001$.

zeigt sich erwartungsgemäß, dass die autoregressiven Effekte geringer ausfallen, da die Stabilität zum Teil durch die bestehenden Unterschiede (kontrolliert durch die LV) bedingt wird. In Hinblick auf die Hypothesen zeigt sich, dass weder H1, H2 noch H4 bestätigt werden. Für H3 zeigt sich sogar ein gegenläufiger Effekt, wonach das arithmetische Wissen zu T3 einen negativen Effekt ($\beta = -.322$, $p < .05$) auf das zehnerüberschreitende Rechnen hat.

Tabelle 2. Ergebnisse der Cross-Lagged Panel Modelle (standardisierte Koeffizienten)

		CLPM L1	CLPM L2	LV
		β (SE)	*β* (SE)	*β* (SE)
Autoregressive Effekte				
AFW				
T1 → T2		0.803*** (.049)	.796** (.055)	.347** (.117)
T1 → T3			.194* (.076)	
T2 → T3		0.897*** (.054)	.637*** (.078)	.414*** (.100)
T2 → T4			.304** (103)	
T3 → T4		0.881*** (.014)	.610*** (.074)	.463*** (.092)
KAW				
T1 → T2		0.468*** (.045)	.461*** (.045)	.422*** (.045)
ZÜR				
T3 → T4		0.603*** (.077)	.642*** (.089)	.594*** (.081)
Kreuzverzögerte Effekte				
AFW T1 → KAW T2	H1	0.311*** (.051)	.316*** (.051)	– .102 (.099)
KAW T1 → AFW T2	H2	0.078 (.053)	.066 (.057)	.027 (.054)
KAW T1 → AFW T3	H2		.051 (.045)	
KAW T2 → AFW T3	H2	– 0.010 (.058)	.025 (.050)	– .015 (.044)
KAW T2 → AFW T4	H2		– .002 (.054)	
AFW T1 → ZÜR T3	H3		.365** (.121)	
AFW T2 → ZÜR T3	H3	.768*** (.062)	.404*** (.113)	.060 (.145)
AFW T2 → ZÜR T4	H3		.254* (.132)	
AFW T3 → ZÜR T4	H3	0.284*** (.069)	.009 (.132)	– .322* (.147)
KAW T1 → ZÜR T3	H4		– .043 (.063)	
KAW T2 → ZÜR T3	H4	– .059 (.064)	.019 (.053)	– .069 (.054)
KAW T2 → ZÜR T4	H4		.020 (.056)	
(Residual)Korrelationen				
T1 – AFW und KAW		.815*** (.023)	.817*** (.022)	.816*** (.023)
T2 – AFW und KAW		.640*** (.035)	.627*** (.033)	.508*** (.062)
T3 – AFW und ZÜR		.657*** (.063)	.669*** (.058)	.570*** (.086)
T4 – AFW und ZÜR		.731*** (.053)	.732*** (.056)	.695*** (.070)

Anmerkungen: β = standardisierter Pfadkoeffizient, SE = Standardfehler. CLPM LAG1: $\chi^2(54) = 172.604$, $p < .001$; RMSEA = .030, 90 %-CI [.025, .035]; CFI = .987; SRMR = .033. CLPM LAG2: $\chi^2(46) = 125.479$, $p < .001$; RMSEA = .027, 90 %-CI [.021, .032]; CFI = .992; SRMR = .022. LKF: $\chi^2(51) = 139.860$, $p < .001$; RMSEA = .027, 90 %-CI [.022, .032]; CFI = .991; SRMR = .023.

Diskussion

Kompetenzen im Zehnerübergang sind in der zweiten Schulstufe ein wesentliches Lernziel von Schülerinnen und Schülern. Die Bedeutung und/oder Wechselwirkung der konstituierenden Komponenten ist jedoch kausal weitgehend ungeklärt: Empirisch ist bislang nicht belegt, ob das konzeptuelle arithmetische Wissen durch Kompetenzen im arithmetischen Faktenwissen aufgebaut wird, oder ob nicht umgekehrt besseres konzeptuelles Wissen das arithmetische Faktenwissen antreibt und so den Zehnerübergang erleichtert. Diese theoretische Frage ist von praktischer Bedeutung: Soll das konzeptuelle Wissen gleichzeitig mit dem arithmetischen Faktenwissen gefördert werden, oder entwickelt es sich auch ohne spezielle Intervention alleine durch die Beschäftigung mit dem Faktenwissen? Die Frage des kausalen Zusammenhangs zwischen dem arithmetischen Faktenwissen und dem konzeptuellen arithmetischen Wissen steht im Fokus der vier Forschungshypothesen. Zur Prüfung der Hypothesen wurden neben dem grundlegenden Untersuchungsmodell (siehe Abb. 2) zwei weitere Modellvarianten berücksichtigt, die eine zusätzliche Kontrolle von individuellen Unterschieden ermöglichen und somit potentiell konfundierende Variablen bei der Schätzung kausaler Effekte besser berücksichtigen.

Hypothesen 2 und 4

Für die H2 und H4 liefert keine der drei Modellvarianten empirische Unterstützung. H2 nimmt an, dass Effekte des frühen konzeptuellen Wissens von T1 für die weitere Entwicklung des arithmetischen Faktenwissens auf T2 Effekte bestehen. H4 bezieht sich auf Effekte des konzeptuellen Faktenwissens auf das zehnerüberschreitende Rechnen. Die Bedeutung des konzeptuellen Wissens für das Faktenwissen und das zehnerüberschreitende Rechnen konnte also im Rahmen dieser Studie nicht bestätigt werden.

Die ersten beiden Modellvarianten (CLPM L1 und CLPM L2) bestätigen H1 (Effekte des arithmetischen Faktenwissens auf das konzeptuelle Wissen) und H3 (Effekte des arithmetischen Faktenwissens auf das zehnerüberschreitende Rechnen).

Hypothesen 1 und 3

H1 nimmt im Detail an, dass ein sicherer Faktenabruf von Basisaufgaben im Zahlenraum 10 die weitere Entwicklung des konzeptuellen Wissens, das wiederum Grundlage für flexibles und adaptives Rechnen ist, positiv beeinflusst (Schulz & Wartha, 2021). Konkret zeigt sich, dass eine gute Performanz beim Lösen von Basisaufgaben zu T1 mit einer höheren Lösungsleistung bei Aufgaben zum konzeptuellen arithmetischen Wissen zu T2 einhergeht. Folglich scheint ein automatisierter Abruf von Rechnungen im Zahlenraum 10 auch Zahlzerlegungen (Teil-Ganzes, ...) zu begünstigen.

H3 bezieht sich im Detail auf den Einfluss des arithmetischen Faktenwissens der ersten und zweiten Schulstufe auf das nachfolgende zehnerüberschreitende Rechnen in Schulstufe 2.

Die Performanz bezüglich des einfachen Faktenwissens im Zahlenraum 10 auf der ersten Schulstufe hat einen positiven Effekt auf die Lösungsleistungen bei Aufgaben des Zehnerübergangs im November der zweiten Schulstufe (T3). Ein analoger Effekt zeigte sich auch zwischen T3 und T4. Ein sicherer Faktenabruf ermöglicht eine Entlastung des Arbeitsgedächtnisses, wodurch komplexere Aufgaben mit Zehnerübergang besser bewältigt werden können (Grube, Weberschock, Blum & Hasselhorn, 2010). Anzumerken ist jedoch, dass die dritte Modellvariante, die durch die Spezifikation einer latenten Hintergrundvariable versucht, die bestehenden Unterschiede in ungemessenen konfundierenden Variablen zu kontrollieren, keine Bestätigung für H1 und H3 liefert. Im Fall von H3 zeigt sich sogar ein negativer Effekt des arithmetischen Faktenwissens zu T3 auf das zehnerüberschreitende Rechnen zu T4. Ähnliche Vorzeichenwechsel fanden bei einem ähnlichen Analysezugang jüngst Gnambs und Lockl (2023) für den Transfereffekt zwischen Lese- und Rechenkompetenzen. Wie dieser Vorzeichenwechsel in der vorliegenden Untersuchung einzuordnen ist, kann hier nicht beantwortet werden.

Limitation

Insgesamt bedarf es für die Analysen von kausalen Effekten über die Zeit einer Berücksichtigung unterschiedlicher Modellansätze, um hier einen umfassenderen Blick auf zeitverzögerte Effekte zu erhalten (Lüdtke & Robitzsch, 2022). In der vorliegenden Arbeit konnten jedoch aufgrund der begrenzten Messzeitpunkte für das konzeptuelle arithmetische Wissen und das zehnerüberschreitende Wissen keine zusätzlichen Modelle geschätzt werden. Zudem mussten für die Modellvariante 3 Restriktionen zur Modellidentifikation verwendet werden, die möglichweise nicht haltbar sind, jedoch auf die Schätzung der anderen Parameter einen Einfluss haben könnten. Zukünftige Studien sollten folglich alle Teilkonstrukte über mindestens 3 Messzeitpunkte erfassen, um unterschiedliche Modellvarianten schätzen zu können und somit ein besseres Verständnis der Zusammenhänge über die Zeit zu erlangen. In diesem Zusammenhang sollte auch darauf geachtet werden, dass alle Teilkonstrukte mit mehreren Indikatoren erfasst werden können, wodurch die Vorteile einer latenten Modellierung (explizite Berücksichtigung der Messfehler) genutzt werden können. So fällt im vorliegenden Beitrag auf, dass die Zusammenhänge für das manifest modellierte konzeptuelle Wissen (Tab. 1) etwas schwächer sind, was durch Messfehler bedingt sein könnte.

Zu erwähnen ist des Weiteren auch, dass möglicherweise die konzeptuelle Trennung von Teilkompetenzen der Rechenfertigkeiten empirisch nicht zu bestätigen ist. Hier sind vor allem die hohen querschnittlichen Korrelationen des Faktenwissens, des konzeptuellen Wissens und des zehnerüberschreitenden Rechnens zu nennen. Beispielsweise sagt die Korrelation zwischen Faktenwissen und Zehnerüberschreitung zu T4 von r = .88 aus, dass die Variablen 77 % gemeinsame Streuung aufweisen (= $.88^2$), was als Indiz für eine gemeinsame Hintergrundvariable zu betrachten ist. Somit sind in Zukunft neben der alternativen Modellierung von Cross-Lagged Effekten (Lüdtke & Robitzsch, 2022) auch die simultane Modellierung von spezifischen Aspekten (konzeptuelles Wissen, ...) und einem allgemeinen Faktor (arithmetische Fähigkeit) mittels longitudinaler Bifaktormodelle in Betracht zu ziehen (Koch, Holtmann, Bohn & Eid, 2018).

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass die Studie auf genesteten Daten basiert (Schüler_innen in Schulstufen). Der Clustereffekt und die damit verbundene Überschätzung der statistischen Signifikanz wurden im Rahmen der Studie durch eine designbasierte Korrektur (Type = Complex in Mplus) berücksichtigt (Stapleton, McNeish & Yang, 2016). Problematisch ist jedoch in diesem Fall, dass die dargestellten Effekte eine Mischung aus Effekten auf Individualebene und Schulstufenebene darstellen (Raudenbush & Bryk, 2002), wobei sich diese theoretisch gegenseitig verstärken aber auch aufheben könnten. Dies ist vor allem auch im Kontext von Lehrkraft- bzw. Unterrichtseffekten zu sehen. Wenn etwa eine Lehrkraft auf „schlechte Ergebnisse" der Schulstufe mit einer effektiven Förderung von konzeptuellem Wissen reagiert, dann liegt in dieser Schulstufe ein geringes Faktenwissen zum Zeitpunkt T vor, jedoch ein durch die Förderung bedingt höheres konzeptuelles Wissen zum Zeitpunkt T + 1 vor. Somit sollte in Zukunft auch eine Mehrebenenmodellierung zur Trennung von Schulstufen- und Individualeffekten vorgenommen werden.

Schlussendlich ist auch noch festzuhalten, dass verbunden mit der Intention der Studie – Wissen über Ansatzpunkte für eine effektive Förderung des Zehnerübergangs zu gewinnen – auch ein experimentelles Design in Betracht zu ziehen ist (Förderung von konzeptuellem Wissen vs. Förderung von Faktenwissen).

Relevanz für die Praxis

Die Ergebnisse dieser Studie bestätigen die Bedeutung eines sicheren Abrufes von einfachem Faktenwissen im Zahlenraum 10 als wesentliches Ziel des arithmetischen Anfangsunterrichts. In der vorliegenden Studie ist ein deutlicher Einfluss des einfachen Faktenwissens auf die weitere Kompetenzentwicklung beim Zehnerübergang beobachtbar. Kinder mit einer hohen Lösungsleistung im ersten Zehner können später auch Aufgaben mit Zehnerübergang besser bewältigen.

Bereits Mitte der ersten Schulstufe ist in einem hohen Maße eine Festlegung der Rechenleistung für die weitere Schullaufbahn gegeben. Neben der unbestritten wichtigen Rolle eines sicheren Faktenabrufs wird in der aktuellen didaktischen Diskussion ein verstärkt verständnisorientierter Zugang gefordert (Kilpatrick et al., 2001), der die Erfassung von Zusammenhängen und Entwicklung strategiegeleiteter Lösungskompetenz fokussiert. Vor allem das Teil-Ganzes Konzept und ein relationales Zahlverständnis sind zwei wesentliche Bereiche, denen in den ersten beiden Schuljahren viel Aufmerksamkeit und Zeit gewidmet wird. Welche Komponenten nun den Zehnerübergang in welchem Ausmaß beeinflussen und somit durch Training beeinflussbar sind, bleibt empirisch noch offen und ist Ziel weiterer Analysen und Forschungsbemühungen.

Ein Ausbleiben dieser Effekte könnte dadurch erklärbar sein, dass beim Lösen von Rechenaufgaben zwar prozedurales arithmetisches Wissen aktiviert wird, aber nicht automatisch auch auf die Möglichkeiten des konzeptuellen Wissens zurückgegriffen wird (Wartha et al., 2023). Hier könnte eine verstärkte Verknüpfung von Zahlzerlegungsübungen (z. B. Zahlentripel 2, 5, 7) und einfachem Faktenwissen (5 + 2 = __, 2 + 5 = __, 7 – 5 = __, 7 – 2 = __) im Anfangsunterricht ein möglicher Ansatzpunkt sein, um die Vernetzung und damit auch die Nutzbarkeit der verschiedenen rechnerischen Teilkompetenzen zu steigern. Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit, dass (zumindest in den ersten und zweiten Schulstufen) die positive Wirkung des konzeptuellen Wissens primär auf das Verständnis von arithmetischen (und Zahl-) Zusammenhängen beschränkt bleibt, und in geringerem Ausmaß zur Verbesserung der Rechen- und / oder Lösungsleistung beiträgt.

Literatur

Aster, M. von, Kaufmann, L., McCaskey, U. & Kucian, K. (2021). Rechenstörungen im Kindes- und Jugendalter. In J. Fegert, F. Resch, P. Plener, M. Kaess, M. Döpfner, K. Konrad & T. Legenbauer (Hrsg.), *Psychiatrie und Psychotherapie des Kindes- und Jugendalters* (S. 1 – 19). Berlin, Heidelberg: Springer Reference Medizin. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49289-5_120-1

Baroody, A. J. (1999). Children's Relational Knowledge of Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137 – 175. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI170201

Baroody, A. J. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 22 – 31. https://doi.org/10.5951/TCM.13.1.0022

Baroody, A. J. & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. Studies in mathematical thinking and learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik. Praxis frühkindliche Bildung*. Braunschweig: Westermann.

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2014). *Frühe mathematische Bildung: Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2633-8

Biedermann, H., Weber, C., Herzog-Punzenberger, B. & Nagel, A. (2016). Auf die Mitschüler/innen kommt es an? Schulische Segregation – Effekte der Schul- und Schulstufenzusammensetzung in der Primarstufe und der Sekundarstufe I. In M. Bruneforth, F. Eder, K. Krainer, C. Schreiner, A. Seel & C. Spiel (Hrsg.), *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2015, Band 2: Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen* (S. 133 – 174). Graz: Leykam. https://doi.org/10.17888/nbb2015-2-4

Butterworth, B. (2017). The implications for education of an innate numerosity-processing mechanism. *Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences, 373*(1740). https://doi.org/10.1098/rstb.2017.0118

Chen, F. F. (2007). Sensitivity of Goodness of Fit Indexes to Lack of Measurement Invariance. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 14*(3), 464 – 504. https://doi.org/10.1080/10705510701301834

Dowker, A. (2001). Numeracy recovery: a pilot scheme for early intervention with young children with numeracy difficulties. *Support for Learning, 16*(1), 6 – 10. https://doi.org/10.1111/1467-9604.00178

Feldman, A. & Berger, A. (2022). Development of the Mental Number Line Representation of Numbers 0 – 10 and Its Relationship to Mental Arithmetic. *Brain sciences, 12*(3), 335. https://doi.org/10.3390/brainsci12030335

Fritz, A., Ehlert, A. & Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education, 3*(1). https://doi.org/10.4102/sajce.v3i1.31

Fritz, A., Ehlert, A. & Leutner, D. (2018). Arithmetische Konzepte aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*(1), 7 – 41. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0131-6

Gaidoschik, M. (2012). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH, Internationaler Verlag der Wissenschaften. https://doi.org/10.3726/978-3-653-01218-7

Gasteiger, H. (2019). *Strategieverwendung bei Additionsaufgaben mit Zehnerübergang Ende Jahrgangsstufe 2*. Verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/38903/1/bzmu19_gasteiger.pdf

Gasteiger, H., Gerve, M., Nüsse, J. & Schlief, L. (2019). *Strategieverwendung bei Additionsaufgaben mit Zehnerübergang Ende Jahrgangsstufe 2: Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*. Münster: WTM-Verlag. Verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/38903/1/bzmu19_gasteiger.pdf

Geary, D. C., Hamson, C. O. & Hoard, M. K. (2000). Numerical and arithmetical cognition: a longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability. *Journal of experimental child psychology, 77*(3), 236 – 263. https://doi.org/10.1006/jecp.2000.2561

Gerster, H. D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen* (2. Aufl., S. 269 – 285). Weinheim: Beltz.

Gerster, H. D. & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt, Rechenschwäche-Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. https://phfr.bsz-bw.de/files/16/gerster.pdf

Gliksman, Y., Berebbi, S. & Henik, A. (2022). Math Fluency during Primary School. *Brain sciences, 12*(3), 371; https://doi.org/10.3390/brainsci12030371

Gliksman, Y., Berebbi, S., Hershman, R. & Henik, A. (2022). BGU-MF: Ben-Gurion University Math Fluency test. *Applied Cognitive Psychology, 36*(2), 293 – 305. https://doi.org/10.1002/acp.3918

Gnambs, T. & Lockl, K. (2023). Bidirectional effects between reading and mathematics development across secondary school. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 26*(2), 345 – 371. https://doi.org/10.1007/s11618-022-01108-w

Greeno, J. G., Riley, M. S. & Gelman, R. (1984). Conceptual competence and children's counting. *Cognitive Psychology, 16*(1), 94 – 143. https://doi.org/10.1016/0010-0285(84)90005-7

Grube, D., Weberschok, U., Blum, M. & Hasselhorn, M. (2010). *DIRG: Diagnostisches Inventar zu Rechenfertigkeiten im Grundschulalter*. Göttingen: Hogrefe.

Hamaker, E. L., Kuiper, R. M. & Grasman, R. P. (2015). A critique of the cross-lagged panel model. *Psychological methods, 20*(1), 102 – 116. https://doi.org/10.1037/a0038889

Kaufmann, L. & Aster, M. von (2022). Rechenstörungen über die Lebensspanne: Konzeptuelle Grundlagen und praktische Aspekte für die klinisch-psychologische Diagnostik und Behandlung. *Psychologie in Österreich, Zeitschrift des Berufsverbands Österreichischer Psychologen, 3*, 254 – 263.

Kaufmann, L., Delazer, M., Pohl, R., Semenza, C. & Dowker, A. (2005). Effects of a specific numeracy educational program in kindergarten children: A pilot study. *Educational Research and Evaluation, 11*(5), 405 – 431. https://doi.org/10.1080/13803610500110497

Kaufmann, L., Wood, G., Rubinsten, O. & Henik, A. (2011). Meta-analyses of developmental fMRI studies investigating typical and atypical trajectories of number processing and calculation. *Developmental neuropsychology, 36*(6), 763 – 787. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549884

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academies Press.

Koch, T., Holtmann, J., Bohn, J. & Eid, M. (2018). Explaining general and specific factors in longitudinal, multimethod, and bifactor models: Some caveats and recommendations. *Psychological methods, 23*(3), 505 – 523. https://doi.org/10.1037/met0000146

Landerl, K., Vogel, S. & Kaufmann, L. (2022). *Dyskalkulie: Modelle, Diagnostik, Intervention* (4. Auflage). *UTB: Bd. 3066*. München: Ernst Reinhardt. https://doi.org/10.36198/9783838557342

Little, R. J. A. (1988). A Test of Missing Completely at Random for Multivariate Data with Missing Values. *Journal of the American Statistical Association, 83*(404), 1198 – 1202. https://doi.org/10.1080/01621459.1988.10478722

Lüdtke, O. & Robitzsch, A. (2022). A Comparison of Different Approaches for Estimating Cross-Lagged Effects from a Causal Inference Perspective. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 29*(6), 888 – 907. https://doi.org/10.1080/10705511.2022.2065278

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche, Dyskalkulie: theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (1998 – 2017). *Mplus User's Guide. 8th Edition*. Los Angeles: Muthén & Muthén.

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Arithmetik.: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akad. Verlag.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: Fundiert, vielseitig, praxisnah* (5., überarbeitete Auflage). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Poltz, N., Quandte, S., Kohn, J., Kucian, K., Wyschkon, A., Aster, M. von et al. (2022). Does It Count? Pre-School Children's Spontaneous Focusing on Numerosity and Their Development of Arithmetical Skills at School. *Brain sciences, 12*(3), 313. https://doi.org/10.3390/brainsci12030313

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel Verlag.

Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 257 – 283. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0014-y

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57477-5

Raudenbush, S. W. & Bryk, A. S. (2002). *Hierarchical linear models: Applications and data analysis methods* (2nd ed.). *Advanced quantitative techniques in the social sciences series: Bd. 1*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Rechtsteiner, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung: Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346 – 362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346

Russell, S. J. (2000). Developing Computational Fluency with Whole Numbers. *Teaching Children Mathematics, 7*(3), 154 – 162. https://link-gale-com.uaccess.univie.ac.at/apps/doc/A67379025/AONE?u=43wien&sid= googleScholar&xid=6a7aa304

Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H. & Müller, H. (2003). Evaluating the Fit of Structural Equation Models: Tests of Significance and Descriptive Goodness-of-Fit Measures. *Methods of Psychological Research Online, 8*(2), 23 – 74. http://www.mpr-online.de

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schrödel-Verlag.

Schneider, W., Küspert, P. & Krajewski, K. (2021). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen* (3. aktualisierte und erweiterte Auflage). *Standardwissen Lehramt*. Paderborn: Brill Schöningh.

Schöfl, M., Winkler, K. & Weber, C. (2021). Projekt FömaK – Förderung mathematischer Kompetenzen. *Lernen und Lernstörungen, 10*(2), 63 – 74. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000314

Schulz, A. & Wartha, S. (2021). Subtraktion und Addition. In A. Schulz & S. Wartha (Hrsg.), *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Zahlen und Operationen am Übergang Primar- / Sekundarstufe* (S. 71 – 125). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0_4

Selig, J. P. & Little, T. D. (2012). Autoregressive and cross-lagged panel analysis for longitudinal data. In B. Laursen, T. D. Little & N. A. Card (Hrsg.), *Handbook of developmental research methods* (S. 265 – 278). The Guilford Press.

Stapleton, L. M., McNeish, D. M. & Yang, J. S. (2016). Multilevel and Single-Level Models for Measured and Latent Variables When Data Are Clustered. *Educational Psychologist, 51*(3 – 4), 317 – 330. https://doi.org/10.1080/00461520.2016.1207178

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, *41*(5), 541 – 555. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0195-3

van de Valle, J.A. (2016). *Elementary and middle school mathematics*. https://www.pearsonhighered.com/assets/samplechapter/0/2/0/5/020538689x.pdf

Vogel, S. E. & Grabner, R. H. (2015). Facets of the Mathematical Brain-From Number Processing to Mathematical Problem Solving. *Mind, Brain, and Education, 9*(4), 187 – 189. https://doi.org/10.1111/mbe.12092

Wartha, S., Schulz, A. & Benz, C. (2023). Zusammenhänge zwischen Zahlzerlegungen, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. *Lernen und Lernstörungen, 12, 155 – 167*. https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000415

Widaman, K. F., Ferrer, E. & Conger, R. D. (2010). Factorial Invariance within Longitudinal Structural Equation Models: Measuring the Same Construct across Time. *Child development perspectives, 4*(1), 10 – 18. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00110.x

Historie

Manuskript eingereicht: 15.08.2023
Manuskript angenommen: 03.12.2023

ORCID

Martin Schöfl
https://orcid.org/0000-0002-7254-2621
Christoph Weber
https://orcid.org/0000-0002-6624-7909

Mag. Dr. Martin Schöfl
Pädagogische Hochschule
Oberösterreich
Kaplanhofstraße 40
4020 Linz
Österreich
martin.schoefl@ph-ooe.at